

C251-29**APROXIMACIONES AL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE “FUNCIÓN”,
A PARTIR DE SU DEFINICIÓN, EN DIFERENTES LIBROS DE TEXTO****P. SASTRE VÁZQUEZ¹, C. BOUBÉE^{1,2}, G. REY¹, A. CAÑIBANO¹, O. DE LORENZI^{1,2},
Y. VILLACAMPA³**

*1) Facultad de Agronomía. Universidad Nacional Centro de la Provincia de Buenos Aires. Azul. Argentina. 2) Instituto Superior de Formación Docente N° 156 “Dr. Palmiro Bogliano”. Azul. Argentina. 3) Universidad de Alicante. Alicante. España.
psastre@faa.unicen.edu.ar - cboubee@faa.unicen.edu.ar - grey@faa.unicen.edu.ar*

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Claves: función, teoría de las funciones semióticas, significado institucional, libro de texto.

RESUMEN

Este trabajo se desarrolla en el marco del Proyecto de Investigación “La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: una perspectiva desde la Teoría de los obstáculos epistemológicos”, y articula con el Proyecto de Investigación del ISFD N° 156 de Azul denominado “La cognición matemática: de los modelos mentales a los modelos conceptuales. El caso de las funciones: Contextualización y modelización”.

Su objetivo es comparar las aproximaciones de dos libros representativos de distintos momentos históricos utilizados en la enseñanza preuniversitaria, sobre el objeto matemático (OM) “función”, a partir de su definición, con el fin de determinar si existen diferencias en el significado institucional de dicho OM.

Sobre la base de la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003) se aborda el análisis macroscópico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a través de la elaboración del constructo “significado de los objetos matemáticos”. Se inicia dicho análisis abordando, en particular, el significado institucional de referencia para el OM función, a través de la aplicación del análisis semiótico de libros de texto.

INTRODUCCION

Este trabajo se desarrolla en el marco del Proyecto de Investigación: “La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: una perspectiva desde la Teoría de los obstáculos epistemológicos”.

Se persigue como objetivo confrontar las diversas aproximaciones de diferentes libros representativos de distintos momentos históricos, utilizados en la enseñanza de la matemática preuniversitaria, sobre el objeto matemático (OM) “función”, a partir de su definición, con el fin de determinar si existen diferencias en el significado institucional de dicho OM.

El proyecto se basa fundamentalmente en el modelo de la cognición matemática designado como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003). En términos generales, este modelo comprende tres etapas destinadas al estudio de las diversas formas de conocimiento matemático y sus interacciones en los sistemas didácticos. En la primera de ellas se aborda el análisis macroscópico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a través de la elaboración del constructo “significado de los objetos matemáticos” (institucional y personal). La segunda etapa corresponde al análisis microscópico de la realización de tareas matemáticas y de los actos de comunicación en la interacción didáctica. La tercera es el esbozo de una teoría de la instrucción matemática significativa, entendida como un proceso multidimensional, distinguiendo cuatro subtrayectorias: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante) y mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales).

En la búsqueda de un enfoque unificado de la cognición y la instrucción matemática, la TFS se apoya, concuerda y muestra complementariedades con otras teorías y enfoques de investigación en didáctica de la matemática, particularmente con la Teoría Antropológica (Chevallard, 1991), la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986), y la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990; 1998).

Los objetos matemáticos (OM) se pueden considerar como entes abstractos que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, entendiendo “institución” en sentido amplio (escuela, libro de texto, una clase, etc.), ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. El significado de un OM no puede reducirse a su definición, sino que deben tenerse en cuenta también las situaciones problemas en los cuales interviene como herramienta de resolución y los medios de expresión que le corresponden.

La noción de significado en la TFS acepta dos dimensiones: la personal (o cognitiva) y la institucional (o epistémica), en tanto se refiera a manifestaciones idiosincrásicas de un sujeto en particular o como producto de prácticas sociales compartidas que dependen del tiempo (Godino y Batanero, 1994).

En el análisis de los significados institucionales de un OM, se incluyen cuatro tipos:

- a. El significado institucional de *referencia*, que es un constructo difícil de delimitar, que resulta de diferentes componentes: el significado del concepto según los “expertos”, la historia de dicho objeto, las orientaciones curriculares, los diferentes libros de texto, los significados personales de los profesores acerca del OM, etc.
- b. El significado institucional *pretendido*, aquello que el profesor se propone enseñar en determinada circunstancia, atendiendo a los significados previos de los estudiantes, el tiempo y los medios disponibles, etc.
- c. El significado institucional *implementado*, que es el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tienen lugar en el aula.
- d. El significado institucional *evaluado*, que se pone en juego en los procesos de evaluación y que será una muestra (que se espera representativa) del significado implementado.

Centrándonos en el significado institucional de referencia, queda claro que el mismo no reside ni en una sola persona, ni sólo en la institución considerada, ni en un único libro de texto, sino que está distribuido entre diferentes personas, instituciones, libros de texto, programas informáticos, etc. Esto hace que sea difícil de determinar, y además, en cierta manera está implícito en todo el proceso (metafóricamente se puede decir que el significado de referencia juega el mismo papel que “el conjunto universal” en la teoría de conjuntos).

Al ser tan amplio y distribuido, una primera aproximación al análisis del significado institucional puede hacerse a partir de los libros de texto de uso más frecuente. Para el análisis

de los libros de texto se utiliza en este trabajo la técnica del análisis semiótico, que permite caracterizar significados de un OM e identificar potenciales conflictos semióticos en la interpretación del texto en un proceso de estudio o en la realización efectiva de una interacción didáctica.

METODOLOGIA

Se seleccionaron dos libros de textos destinados al nivel polimodal / secundario, actualmente vigentes y representativos de dos momentos históricos distintos, identificados en este trabajo como *Libro A* (1ª edición - 2005) y *Libro B* (17ª edición -1980), que incluyeran la definición de Función. (En el libro A: pág. 11 a 14 con el título: Funciones y en el libro B: pág. 21 a 26 con el título: Noción de Función).

La metodología utilizada para el análisis en cada uno de los textos consistió básicamente, en una lectura analítica de los mismos, tratando de recoger todos los aspectos relacionados con el contenido para identificar las unidades y subunidades de análisis, según la técnica de análisis semiótico, y clasificar la información atendiendo a los siguientes apartados: a) *praxis* (situaciones problemas), b) *lenguaje* (vocablos, notaciones, gráficos) y c) *contenido* (conceptos, definiciones, propiedades, argumentos).

Debemos aclarar que si bien todas las palabras y expresiones lingüísticas tienen la consideración de entidades ostensivas, esto es, son algo que se muestra por sí mismo, en nuestro análisis sólo resaltaremos aquellos ostensivos que son específicos del campo de las funciones.

La Unidad de Análisis elegida fue el bloque de contenido que incluyera la *Definición de Función*, sin considerar otros conceptos, aunque también aportan a su significado, tales como Dominio, Rango, Raíces, etc, ni el análisis particular de cada uno de los registros de representación, como gráfico, tabla, etc.

Como Subunidades de Análisis se seleccionaron los párrafos significativos en relación con el contenido, ya que de acuerdo con nuestros supuestos teóricos, los conceptos incluyen también las situaciones en las que son presentados y las representaciones que les son asociadas.

Cada Subunidad de Análisis se clasificó según las categorías indicadas para la variable VI:

VI: *Tipología de la subunidad de análisis*: 1) definición, 2) argumentación, 3) demostración, 4) propiedad, 5) ejemplo¹ introductorio, 6) ejemplo después de la definición, 7) ejercicio² introductorio, 8) ejercicio después de la definición, 9) presentación del tema y 10) información anexa.

Para cada una de las Subunidades de Análisis se consideraron las siguientes variables, cuando correspondiera:

- Variables de Praxis

- *P1: Tipo de actividad*: 1) identificar variables, 2) calcular, 3) reconocer, 4) discriminar, 5) escribir ejemplos, 6) demostrar, 7) comprobar propiedades, 8) interpretar, 9) graficar, 10) manejar tablas.
- *P2: Contexto del enunciado de la subunidad*: 1) biología, 2) física, 3) vida cotidiana, 4) intramatemático, 5) remite a actividades anteriores.

¹ Se consideran *ejemplos* a las descripciones de situaciones en que se aclara el significado de los conceptos introducidos teóricamente así como los problemas que se presentan resueltos.

² Se consideran *ejercicios* todas aquellas actividades que con distintos títulos (como problemas, actividades, ejercicios) se presentan para que el alumno las resuelva.

- *P3: Clase de argumentación utilizada:* 1) completa, 2) rigurosa o matemática completa, 3) no justifica el resultado, 4) presenta justificaciones alternativas, 5) incompleta, 6) matemática incompleta.
- *P4: Método utilizado:* 1) silogismo, 2) reducción al absurdo, 3) inducción completa, 4) explica en forma verbal.
- *P5: Claridad de los pasos:* 1) muy claros, 2) poco claros, 3) confusos³.
- *P6: Corrección de los pasos:* 1) correctos, 2) incorrectos.
- *P7: Idea global del proceso seguido:* 1) explicita el proceso, 2) no explicita.
- *P8: Existencia de información no necesaria:* 1) si, 2) no.

- Variables del lenguaje

- *L1: Claridad del enunciado:* 1) muy claro, 2) poco claro, 3) confuso⁴.
- *L2: Corrección del enunciado:* 1) correcto, 2) incorrecto.
- *L3: Forma de presentación de la información:* 1) numérica, 2) verbal, 3) simbólica, 4) tabla, 5) gráfico, 6) diagrama, 7) fotos, dibujos, 8) diagrama de Venn, 9) grafos⁵.
- *L4: Expresiones usuales y específicas que utiliza: (conectivas lógicas, palabras de enlace, etc.):* 1) Incluye expresiones específicas del lenguaje matemático, 2) no incluye expresiones específicas del lenguaje matemático.
- *L5: Complejidad sintáctica:* 1) muy compleja, 2) compleja, 3) simple, 4) muy simple.
- *L6: Listado de vocablos matemáticos utilizados, aunque no los defina.*
- *L7: Listado de símbolos*

- Variables de contenido

- *C1: Modelo de definición de función al que se hace referencia explícita o implícitamente:* 0) relación entre dos variables, 1) relación entre dos variables numéricas, 2) relación entre un conjunto arbitrario y los números reales, 3) relación entre dos conjuntos arbitrarios, 4) conjunto de pares ordenados, 5) proceso de entrada y salida.
- *C2: Presencia de consideraciones histórica:* 1) si, 2) no.
- *C3: Presencia de errores:* 1) presenta errores tipográfico, 2) no presenta errores tipográficos, 3) presenta errores conceptuales, 4) no presenta errores conceptuales.
- *C4: Conceptos:* listado.
- *C5: Propiedades:* listado.

Esta técnica de análisis se aplicó en cada uno de los libros de texto seleccionados, permitiendo la comparación de los resultados.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En la siguiente tabla (Tabla 1) se muestran los resultados obtenidos al estudiar la unidad de análisis en ambos libros, dividiéndolas en subunidades, y luego las caracterizaciones de las variables de praxis, lenguaje y contenido que se desprenden de la categorización de las distintas variables.

³ Para esta variable, se considera “confuso” a la falta de claridad por motivos tales como: desorganización, alteración, de difícil comprensión, omisiones, excesiva complejidad.

⁴ Se considera “confuso” al enunciado desordenado, complejo, que se presta a diferentes interpretaciones, vago, incomprensible por el léxico inadecuado para los destinatarios del texto.

⁵ Diagramas de flechas.

<i>LIBRO A</i>	<i>LIBRO B</i>
<i>Subunidades de análisis</i>	
Se categorizaron nueve subunidades de análisis con una amplia variedad en la tipología: comienza con un relato como presentación del tema, luego ejemplos introductorios, un ejercicio introductorio, definición, ejemplo después de la definición y un ejercicio después de la definición. Además hay un anexo que corresponde a una historieta cómica relacionada al tema.	Se categorizaron doce subunidades de análisis con muy poca variedad en cuanto a su tipología, repitiéndose la secuencia que comienza con una definición y sigue con ejemplo/s después de la definición.
Entre las distintas tipologías hay predominancia de la correspondiente a ejemplos introductorios.	En cuanto a las proporciones de ambas tipologías hay una predominancia de ejemplos posteriores a las definiciones.
Existe solo una subunidad categorizada como definición, y aparece ocupando el sexto lugar del total de subunidades, después de la presentación del tema y de tres ejemplos y un ejercicio, todos introductorios.	La unidad de análisis se inicia con una definición. Aparecen un total de cuatro subunidades clasificadas como definiciones y las restantes, que aparecen a continuación de cada una de las anteriores, son ejemplos.
	No se encuentran subunidades referidas a ejemplos introductorios ni ejercicios previos y/o posteriores a las definiciones.
Variables de Praxis	
Las tipologías de actividades que se encontraron corresponden a: interpretar, reconocer, identificar variables, calcular, discriminar, comprobar propiedades y manejar tablas.	En cuanto a las actividades, estas son de dos tipos: de interpretación y de reconocimiento.
Los contextos de los enunciados son variados: de la vida cotidiana, referentes a actividades anteriores en el texto, intramatemáticos y un caso relacionado con la Biología.	Los contextos de los enunciados corresponden a intramatemáticos y de la vida cotidiana.
Se encontraron solo cuatro argumentaciones que fueron clasificadas dos de ellas como completas, una como matemática incompleta y la restante no justifica el resultado.	Hay abundante argumentación (en ocho subunidades) clasificadas como completas en su mayoría, aunque también aparecen una argumentación incompleta y otra que no justifica el resultado.
Respecto al método utilizado solo aparecen explicaciones en forma verbal.	Respecto al método utilizado solo aparecen explicaciones en forma verbal.
Hay variedad en la clasificación referida a la claridad de los pasos: dos casos se clasificaron como muy claros, uno como poco claro y otro caso como confuso.	Respecto a la claridad de los pasos, se clasificaron como poco claros en cuatro casos y muy claros en dos casos.
En todos los casos los pasos seguidos se clasificaron como correctos.	En todos los casos los pasos seguidos se clasificaron como correctos.
Hay una preponderancia de la explicitación de la idea global de los procesos seguidos.	Hay una preponderancia de la explicitación de la idea global de los procesos seguidos.
No hay presencia de información considerada como no necesaria, aunque en algunos problemas se trabaja con una tercera variable en forma innecesaria. Sí se observan omisiones de notación simbólica y de expresiones matemáticas de los conceptos.	En general no hay presencia de información considerada como no necesaria; sólo se encontró una redundancia.

Variables de Lenguaje	
En la mayoría de las subunidades de análisis los enunciados son muy claros aunque se encontró un enunciado poco claro y otro clasificado como confuso porque se trata de un ejemplo donde se usa simbología desconocida hasta el momento: $f(x)$.	En nueve subunidades de análisis los enunciados son muy claros y en tres son poco claros.
La mayoría de los enunciados se encontraron como correctos, con una sola excepción.	Todos los enunciados se categorizaron como correctos.
Las formas de presentación de la información es muy variada: verbal, mediante gráficos, mediante fotos o dibujos, mediante tablas y simbólica.	La forma de presentación de la información es por lo general, verbal (en diez de las doce subunidades), simbólica en una subunidad y gráfica en otra. En algunas oportunidades la información de tipo verbal está acompañada de información simbólica y en un caso mediante diagramas de Venn. Solo en una subunidad se halló una gráfica (gráfico de proyecciones).
Incluye expresiones específicas del lenguaje matemático solo en cuatro subunidades: en el relato inicial (“Muchas de estas relaciones son funciones...”), en un ejemplo introductorio (“cuál es la mayor diferencia entre...”), en la definición (“a cada valor de la variable independiente le corresponde un ...”) y en los ejemplos posteriores a la definición (“...porque a los números negativos no les corresponde ningún número real...”)	Incluye en todas las subunidades expresiones específicas del lenguaje matemático.
La complejidad sintáctica utilizada es considerada mayoritariamente como simple y solo en un caso es compleja (en un ejemplo introductorio).	La complejidad sintáctica utilizada es considerada mayoritariamente simple y en un par de ejemplos es muy simple.
Vocablos matemáticos utilizados: gráficos, relaciones, variables, funciones, fórmulas matemáticas, predecir, ejes, punto, distancia entre curvas, correspondencia, variable independiente, variable dependiente, valor, correspondencia, número negativo, número real.	Vocablos matemáticos utilizados: relación, aplicación, función, elemento, dominio, corresponder, contradominio, imagen, conjunto, números naturales, aplicación, mitad, proyecciones, punto, plano, recta perpendicular, intersección, función numérica, diagrama de Venn, campo existencial, variable independiente, variable dependiente.
En un ejemplo después de una definición aparecen los únicos símbolos: $f(x)$ y $g(x)$ sin que haya ninguna explicación previa o simultánea de su significado.	Hay un variado listado de símbolos: x , y , $y = f(x)$, $y = 2x + 3$, etc. Hay explicaciones acerca de su significado (por ej. “la letra f indica...”; “ x designa...”; “ y representa...”).
Variables de Contenido	
Los modelos de definición de función a los que se hace referencia (explícita o implícitamente) son: relación entre dos variables y relación entre dos variables numéricas. Solo en un ejemplo se refiere a una relación entre un conjunto arbitrario y los números reales.	Los modelos de definición de función a los que se hace referencia (explícita o implícitamente) son: relación entre dos conjuntos arbitrarios y conjunto de pares ordenados. En un ejemplo aparece como relación entre dos variables y en una definición como relación entre dos variables numéricas.
No hay consideraciones históricas.	No hay consideraciones históricas.
Presenta un error tipográfico (un número con una cifra de más) y una omisión de unidades en los	No se encontraron errores tipográficos ni conceptuales.

cálculos de un ejemplo introductorio.	
Breve listado de conceptos, aunque no se definan: relaciones, variables, variable independiente, variable dependiente, función, fórmulas matemáticas.	Amplio listado de conceptos, aunque no se definan: relación, aplicación, elemento, dominio, contradominio, imagen, función, notación, no es función, proyecciones, traslaciones, rotaciones, simetrías, función numérica, variable dependiente, variable independiente.
Breve listado de propiedades.	Amplio listado de propiedades.

Tabla 1: resultados del análisis semiótico de los libros A y B.

A modo de síntesis, enunciarnos como principales *diferencias*:

- Distinta secuenciación y variedad en la tipología de los párrafos significativos en relación al contenido. En el libro A la secuenciación es: relato de presentación – ejemplos introductorios – ejercicios introductorios – definición – ejemplos posdefinición – ejercicios posdefinición. En el libro B se reitera la secuencia definición – ejemplo/s posdefinición, con ausencia de ejercicios.

- En cuanto a las *variables de praxis*, se destaca la diferencia en cuanto a la tipología de las actividades: mientras que en el libro A se encuentra una amplia variedad, en el libro B solo existen actividades de interpretación y reconocimiento.

En lo que se refiere a los contextos de los enunciados, se encuentra variedad de contextos en el libro A y solo enunciados intramatemáticos o relativos a la vida cotidiana en el libro B.

Respecto de la argumentación, existe una menor preponderancia en el libro A respecto del B. Además en este último, la mayoría son argumentaciones completas.

- En el análisis de *variables de lenguaje* se destacan dos diferencias: variadas formas de presentación de la información en el libro A y solo dos formas predominantes de presentación de la información (verbal o simbólica) en el libro B; en cambio, aparecen muy pocos símbolos y expresiones específicas del lenguaje matemático en el libro A y un amplio listado de símbolos y de expresiones específicas del lenguaje matemático en el libro B, incluyendo además las respectivas explicaciones verbales de los significados de los símbolos.

- Respecto a las *variables de contenido*, la diferencia que se destaca es la referencia explícita o implícita de los distintos modelos de definición de función (libro A: mayoritariamente “relación entre variables” y libro B: mayoritariamente “relación entre dos conjuntos arbitrarios” y “conjunto de pares ordenados”).

Con respecto a la presencia de conceptos y propiedades, el libro A tiene un listado mucho más breve de ellos respecto del libro B.

Las principales *coincidencias* encontradas en el análisis de los libros son:

- Del análisis de las variables de praxis se desprende que en ambos libros se utiliza como método la explicación verbal, que los pasos son correctos y que en ambos existe una preponderancia de la explicitación de la idea global de los procesos seguidos.

- En cuanto a las variables de lenguaje analizadas, en la mayoría de las subunidades de ambos libros, los enunciados resultaron muy claros y correctos, con una complejidad sintáctica simple.

- En el análisis de las variables de contenido, la única coincidencia registrada en los dos libros es la ausencia de consideraciones históricas del concepto.

CONCLUSIONES

De la confrontación de las características de las subunidades de análisis surgen importantes diferencias en los itinerarios didácticos propuestos por los textos. Esta diferencia, de acuerdo

a nuestros supuestos teóricos resulta de alta relevancia ya que el significado de un concepto incluye tanto su definición como las situaciones en que se presenta y las representaciones que le son asociadas.

Del análisis comparativo de las variables estudiadas (praxis, lenguaje y contenido) surge que las diferencias respecto a la definición de función resultan más significativas que las coincidencias. A partir de las diferencias encontradas en la definición, es posible referirse a diferencias respecto de todo el objeto matemático.

Por lo tanto, puede inferirse una distinta caracterización del significado institucional de referencia para el OM "función" imperante en cada momento histórico.

Esta evolución en el significado institucional se correspondería además con las renovaciones curriculares y la producción de nuevos conocimientos pedagógicos y didácticos de los últimos años.

Este trabajo representa una primera aproximación al significado institucional de referencia del OM "función", sobre el que profundizaremos, analizando otros libros de texto que estén orientados a diferentes niveles educativos, comparando las orientaciones curriculares imperantes en distintos períodos, y mediante entrevistas a docentes de niveles pre - universitario, superior y universitario.

BIBLIOGRAFIA

- ALTMAN, S., COMPARATORE, C., KURZROK, L. 2005. *Matemática / Polimodal. Funciones I*. (Longseller. Argentina).
- ARRIECHE, M. 2002. *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis Doctoral. (Universidad de Granada).
- BROUSSEAU, G. 1986. Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 33 - 115.
- CHEVALLARD, Y. 1992. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives aportes par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1): 73-112.
- GODINO, J. D. 2002. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 22, (2/3).
- GODINO, J. D. 2003. *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Monografía de Investigación para el Concurso a Cátedra de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperable en: <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- GODINO, J. D.; BATANERO, C. 1994. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3: 325 - 355.
- RAMOS, A. B.; FONT, V. 2004. Creencias y concepciones del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y Sociales. *Actas III. Congreso Internacional Docencia Universitaria e Innovación*. Girona.
- REPETTO, C., LINSKENS, M., FESQUET, H. 1980. *Aritmética 3*. (Ed. Kapelusz. 17ª edición. Argentina) .
- VERGNAUD, G. 1990. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 10, n. 2,3, pp. 133-170.