$Ext^1_{\mathbb{Z}}(A,B)$: La construcción de un invariante clásico

Hipolito Jose Treffinger Cienfuegos

20 de marzo de 2013

Resumen

A mediados del siglo XX los matemáticos Henri Cartan y Samuel Eilenberg, por un lado, y Alexander Grothendieck, por otro, desarrollaron las bases del álgebra homológica. Inspirados en ideas de la topología algebraica y el álgebra abstracta, desarrollaron la teoría de una de las ramas de la matemática que más se ha expandido desde entonces y que aún hoy ofrece grandes desafíos para los investigadores en la actualidad.

Aquí se presentará un problema que ya había sido considerado por Baer en el año 1934[1]: el cálculo del $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z})$. Se resolverá utilizando las herramientas del álgebra homológica en el caso particular de los grupos abelianos.

1. Preliminares

Antes de empezar con el problema, es necesario definir el concepto de grupo abeliano.

Definición 1 *Un conjunto G dotado de una operación binaria $+: G \times G \to G$, que llamaremos "suma", es un grupo si:*

1. *existe un elemento neutro 0 para la suma. Es decir:*

$$g + 0 = 0 + g = g \forall g \in G$$

2. *todo elemento g tiene un inverso para la suma, denotado $-g$, de modo que*

$$g + (-g) = (-g) + g = 0$$

3. *para cualquier terna de elementos a, b, c en el grupo G se cumple que la suma es asociativa, es decir que cumplen la ecuación*

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

[1] ver el artículo *Erweirterung von Gruppen und ihren Isomorphismen*, Math. Z. **38** 375-416

> *La asociatividad de la suma es lo que nos permitirá escribir sin ambigüedad* $a + b + c$

El grupo G *se dice abeliano o conmutativo si dados dos elementos cualquiera* a, b *de* G *cumplen que* $a + b = b + a$

A partir de este momento todos los grupos considerados serán grupos abelianos.

También es necesario tener presente el siguiente resultado:

Teorema 1 (de estructura de los grupos abelianos finitamente generados) *Sea* G *un grupo abeliano finitamente generado, entonces existe un número* t *natural y números naturales* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *de modo que* a_i *divida a* a_{i-1} *para todo* i *entre 2 y* k*, tal que*

$$G \cong \mathbb{Z}^t \oplus \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{a_k}$$

2. Motivación

Sea G un grupo abeliano. Este grupo tiene al menos dos subgrupos, llamados subgrupos triviales, él mismo y el subgrupo $\{0\}$.

Sin embargo, este grupo G puede tener muchos más subgrupos. Puede incluso tener infinitos.

Tomemos un subgrupo cualquiera $B \subset G$. Dado que estamos trabajando en un grupo abeliano, siempre podemos conciderar el grupo cociente resultante $A = G/B$. Se puede ver que exite una relación entre los grupos A y B. Esta relación es la de A ser el cociente de un grupo G por un subgrupo del propio G que es *isomorfo* [2] a B.

Lo dicho hasta el momento permite listar todos los posibles pares ordenados (A, B) donde el $A = G/B$.

Por ejemplo, concideremos al grupo abeliano más conocido: el grupo de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la suma usual como operación.

En este caso, todos los subgrupos son los múltiplos de un número fijo n. Es decir, que los subgrupos son de la forma $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ y cada uno de los cocientes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ es el clásico grupo de los enteros módulo n. Entonces, se puede listar de forma natural a todos los pares ordenados *grupo cociente-subgrupo* asociados al grupo $\mathbb{Z}$. La lista completa es:

$$\{(\mathbb{Z}_n, n\mathbb{Z}) : \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

Tomemos otro ejemplo. Supongamos que tenemos dos grupos abelianos cualquiera A y B. Concideremos su suma directa $A \oplus B = \{(a, b) : a \in A, b \in$

[2] que es decir de forma elegante que son dos formas distintas de ver el mismo objeto matemático

$B\}$. Este conjunto es también un grupo abeliano con la suma componente a componente.

Aquí A y B son subgrupos de $A \oplus B$. Además $(A \oplus B)/A = B$ y $(A \oplus B)/B = A$. Entonces, dentro de la lista completa de los pares ordenados asociados al grupo $A \oplus B$ tendremos tanto al par (A, B) como al par (B, A).

Ahora analicemos lo siguiente. Tomemos un entero cualquiera, por ejemplo 5. Como en el ejemplo anterior A y B eran grupos arbitrarios, podemos elegir que $A = \mathbb{Z}_5$ y $B = 5\mathbb{Z}$. Así es posible encontrar encontrar el par $(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z})$ entre los pares asociados a $\mathbb{Z}$ por un lado, y los asociados a $\mathbb{Z}_5 \oplus 5\mathbb{Z}$ por otro. Además, si nos fijamos en el teorema de estructura de los grupos abelianos, vemos que en realidad $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_5 \oplus 5\mathbb{Z}$ no son isomorfos.

Aquí surge la siguiente pregunta: Dado un par ordenado de grupos (A, B), ¿de cuantas maneras escencialmente distintas puedo encontrar al segundo como subgrupo de un grupo G y tal que G sobre el segundo me de el primero?

Para responder esta pregunta es necesario hacer la siguiente construcción:

Por un lado, B es un subgrupo de G, podemos pensar en que B lo *incluímos* dentro de G a través de una función inyectiva ι. Y por el otro, como A es igual a G/B entonces podremos construir una función π sobreyectiva desde G hacia A de tal manera que el núcleo de π^3 sea la imagen de ι. En símbolos matemáticos: $\ker(\pi) = \iota(B)$. Esta construcción se nota como

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

Estas estructuras son denominadas **sucesiones exactas cortas**. En ellas se sobreentiende la **exactitud** en G: $\ker(\pi) = \iota(B)$. Además los ceros en los extremos indican que ι es inyectiva y que π es sobreyectiva.

Con las sucesiones exactas cortas definidas, se puede reformular la pregunta que nos hicimos antes sobre los pares ordenados de grupos. Ahora podemos preguntarnos: ¿cuántas sucesiones exactas cortas esencialmente distintas existen con A en el extremo derecho y B en el izquierdo?

Para comprender la pregunta es necesario establecer el significado de *esencialmente*. A continuación definiremos la relación de equivalencia:

Dos sucesiones exactas cortas

$$\xi : \ 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

$$\xi' : \ 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota'} G' \xrightarrow{\pi'} A \longrightarrow 0$$

Son esencialmente iguales o equivalentes si existe una función f que transforme al diagrama de abajo en uno conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, leftrightarrow, "id"'] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "id"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota'"] & G' \arrow[r, "\pi'"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

---

[3]los elementos de G que van al elemento neutro de A

Que el diagrama sea conmutativo implica que dados un punto de partida y uno de llegada, el camino por el que vayamos nos es indiferente.

El conjunto de todas las clases de equivalencia de las sucesiones exactas cortas con extremo izquierdo B y derecho A se nota $E(A, B)$.

Se puede demostrar que si existe una f que hace conmutar el diagrama, entonces f es un isomorfismo. Esto implica que $E(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z})$ tiene al menos dos elementos:

$$\xi_0 : \ 0 \longrightarrow 5\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota_1} 5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5 \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{Z}_5 \longrightarrow 0$$

$$\xi_i : \ 0 \longrightarrow 5\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_5 \longrightarrow 0$$

Elementos que son escencialmente distintos, según el teorema enunciado en los preliminares.

Entonces, ¿cuántas sucesiones exactas cortas esencialmente distintas existen con A en el extremo derecho y B en el izquierdo?

Baer, en su artículo *Erweirterung von Gruppen und ihren Isomorphismen* del año 1934, en un contexto mucho más general, demostró que para este caso la respuesta es exactamente 5. Nosotros vamos a resolverlo de una forma distinta. Vamos a aplicar técnicas desarrolladas 20 años más tarde por otros matemáticos[4].

3. Resolución del problema

El problema que intentamos resolver es: ¿cuántos elementos tiene el $E(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z})$?

Hay distintos caminos para obtener una solución a este problema. Entre ellos el trazado por Baer en su paper original. Nosotros tomaremos otro camino. Primero, transformaremos el problema en uno equivalente. De esta manera podremos utilizar las herramientas del álgebra homológica para su resolución.

Supongamos que tenemos una sucesion exacta corta de $(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z})$. Por un lado $\mathbb{Z}_5$ está cubierta por un grupo G a través una función π fija. Por otro lado, supongamos que tenemos dada una función $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ que sea asignarle a cada entero su correspondiente módulo 5.

Esto nos permite definir una función $\tilde{\phi} : \mathbb{Z} \to G$ de modo que $\phi = \pi \circ \tilde{\phi}$, simplemente enviando el 1 de $\mathbb{Z}$ en cualquiera de los elementos de $\pi^{-1}(1) \subset G$.

Ahora bien, el hecho que $\phi = \pi \circ \tilde{\phi}$, luego de algún análisis, nos muestra que $\tilde{\phi}$ induce una función γ entre el núcleo de ϕ y el núcleo de π, que no es otro que el propio $5\mathbb{Z}$.

En resumen, la construcción que hicimos más arriba nos dice que el siguiente diagrama es conmutativo:

[4] ver Hilton P., Stammbach U.:A Course in Homological Algebra. Ed. Springer-Verlag

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\phi) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\tilde{\phi}"'] & \mathbb{Z}_5 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "id"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 5\mathbb{Z} \arrow[r, "\iota"] & G \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{Z}_5 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Siendo esta γ la que me va a interesar la cual, pues es única para una sucesión exacta corta dada.

Así como definimos clases de equivalencia en los elementos de $E(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z})$, más adelante tendremos una relación de equivalencia entre todas las γ posibles. De donde definiremos el $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z})$ justamente como el conjunto de clases de equivalencia de estas funciones. Se demuestra, aunque no lo haremos aquí, que efectivamente estos dos conjuntos son dos caras de la misma moneda, por lo que conociendo uno conoceremos también el otro.

Antes de calcular explícitamente el $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z})$ vamos a definir una herramienta fundamental, el $Hom_{\mathbb{Z}}(A, B)$ de dos grupos abelianos A y B.

La definición no es otra que el conjunto de todas las funciones que van de A hasta B que respetan la suma. En términos matemáticos es:

$$Hom_{\mathbb{Z}}(A, B) = \{f : A \to B / f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) \forall a_1, a_2 \in A\}$$

Incluso este conjunto tiene él mismo una estructura de grupo abeliano, tomando la suma punto a punto. Es decir definiendo $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ para cualesquiera $f_1, f_2 \in Hom_{\mathbb{Z}}(A, B)$.

Ahora supongamos que tenemos una función $f : A \to B$. Esta función f nos va a inducir una función $f^* : Hom_{\mathbb{Z}}(B, C) \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, C)$, que parte de todas las funciones que van de B a C y que termina en el conjunto de funciones que parten de A y terminan en C. La definición de $f^*(g)$, para cada $g \in Hom_{\mathbb{Z}}(B, C)$ simplemente como la compocisión $f^*(g) = g \circ f$. Para dejarlo mejor ilustrado mostramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

Ahora si estamos listos para encontrar el $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z})$. Tomemos el diagrama

$$0 \longrightarrow \ker(\phi) \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_5 \longrightarrow 0$$

Y ahora calculemos todos los $Hom_{\mathbb{Z}}(-, 5\mathbb{Z})$:

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\ker(\phi), 5\mathbb{Z})$$

Notemos que la imagen de $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z})$ por i^* dentro de $Hom_{\mathbb{Z}}(\ker(\phi), 5\mathbb{Z})$ es un subgrupo. Razón por la cual podemos hacer el cociente

$$\frac{Hom_{\mathbb{Z}}(\ker(\phi), 5\mathbb{Z})}{Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z})} = Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z})$$

Este cociente define la relación de equivalencia que les había anunciado. Lo que quiere es que dos funciones γ_1 y γ_2 serán equivalentes siempre y cuando la diferencia entre una función y otra sea alguna función que se pueda escribir como $i^*(h) = h \circ i$, donde h es alguna función que empieza en $\mathbb{Z}$ y termina en $5\mathbb{Z}$.

Aquellos que hayan estudiado teoría de grupos sabrán que dado que todos nuestros grupos son cíclicos, cualquier función que parta de ellos estará caracterizada por la imagen de un generador. Eligiendo el 1 de $\mathbb{Z}$, el 1 de $\mathbb{Z}_5$ y el 5 de $5\mathbb{Z}$, podemos reescribir el diagrama de más arriba con la estructura explícita de cada uno de los Hom.

$$0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{\phi^*} 5\mathbb{Z} \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Donde p es la proyección cociente (cokernel para ser más precisos). Y, en este caso, i^* actúa como la inyección natural. Es así que obtenemos el resultado buscado:

$$Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_5, 5\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_5$$

Aún más, $\mathbb{Z}_5$ tiene naturalmente una estructura de grupo. Esto nos dice que de alguna manera estas clase de equivalencia de funciones pueden sumarse.

Esto puede ser sorprendente, pero no lo es demasiado por el hecho que marcamos más arriba y es que las propias funciones tienen ya una suma. Ahora lo que sí es realmente asombroso es que las sucesiones exactas cortas que definimos al principio de este trabajo, por ser la otra cara de esta misma moneda, también pueden sumarse. El como se suman estos elementos de $E(A, B)$ lo explicitó el propio Baer en su trabajo original.